CONCOURS SPECIAL D'ENTREE AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

1985

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction ζ définie par la relation

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$

A cet effet, pour tout $x > 0$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Les parties I, II *et* III *sont largement indépendantes.*

I. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DE ζ

1. DÉFINITION ET RÉGULARITÉ DE ζ.

a. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. On note ζ sa somme.

b. Établir que cette série est normalement convergente sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha > 1$. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

c. Prouver que ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est de classe C^∞ sur cet intervalle. Étudier le sens de variation de ζ et de sa dérivée ζ'.

2. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE ζ.

Dans cette question on suppose que $x \in]1, +\infty[$.

a. Établir que, pour tout entier $n > 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}.$$

b. Prouver que $0 \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} + \frac{1}{2^x}$.

En déduire la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Prouver que $\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$. En déduire la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 (par valeurs strictement supérieures). Montrer que $\zeta(1+h) \sim \frac{1}{h}$ au voisinage de $h = 0$.

II. ÉTUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE ζ AU VOISINAGE DE 1 PAR PROLONGEMENT

La méthode utilisée consiste à écrire ζ sous une autre forme, à l'aide de la fonction φ définie par la relation

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} + \ldots$$

1. DÉFINITION ET RÉGULARITÉ DE φ.

a. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note φ sa somme.

b. Étudier la convergence uniforme de cette série. En déduire que φ est continue sur $]0, +\infty[$.

c. Prouver que φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

2. EXPRESSION DE ζ À L'AIDE DE φ.

a. Montrer que pour tout élément x de $]1, +\infty[$,

$$\zeta(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2^{x-1}} \zeta(x).$$

b. Soit a un nombre réel; établir que la fonction $h \longrightarrow \frac{1}{h}[\exp(ah) - 1]$ se prolonge de manière unique en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c. Déduire de a et b qu'il existe une fonction χ de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ telle que, pour tout $h > 0$,

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{h} \chi(h).$$

Donner la valeur de $\chi(0)$ et en déduire celle de $\varphi(1)$.

d. Prouver enfin que, pour tout entier naturel k, $\zeta(1+h)$ peut s'écrire sous la forme

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \beta_0 + \beta_1 h + \ldots + \beta_k h^k + \varepsilon(h) h^k,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

III. ÉTUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE ζ AU VOISINAGE DE 1 PAR COMPARAISON A UNE INTÉGRALE

Cette méthode, plus élaborée que celle du II, permet notamment d'expliciter les coefficients β_r du développement limité précédent.

1. QUESTION PRÉLIMINAIRE : COMPARAISON D'UNE SÉRIE À UNE INTÉGRALE.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ converge.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $w_n = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$ et on convient que $w_1 = f(1)$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$w_n = \int_{n-1}^{n} [t - (n-1)] f'(t)\, dt.$$

b. En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |w_n| \leqslant \int_1^{+\infty} |f'(t)|\, dt.$$

c. Prouver enfin que

$$\lim_{p \to +\infty} \left[\sum_{n=1}^{p} f(n) - \int_1^p f(t)\, dt \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n.$$

2. Application aux séries de Bertrand.

a. Vérifier que, pour tout entier $r \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto f_r(t) = \dfrac{(\ln t)^r}{t}$ satisfait aux conditions de la question précédente. $\left(\text{On convient que } f_0(t) = \dfrac{1}{t}\right)$.

b. En déduire que la suite de terme général $v_p = \sum_{n=1}^{p} \dfrac{(\ln n)^r}{n} - \dfrac{1}{r+1} (\ln p)^{r+1}$ admet une limite finie γ_r.

$\left(\text{Le nombre } \gamma_0, \text{ limite de } 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{p} - \ln p, \text{ n'est autre que la constante d'Euler}\right)$.

c. Étudier le sens de variation de f_r ; en déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} |f_r'(t)|\, dt$.

d. Établir les majorations suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 1 \\ |\gamma_r| \leqslant 2 r^r e^{-r} \quad \text{si} \quad r \geqslant 1. \end{cases}$$

3. Application à la fonction ζ.

Pour tout nombre réel $h > -1$, on pose :

$$w_n(h) = \frac{1}{n^{1+h}} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{1+h}} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2,$$
$$w_1(h) = 1.$$

a. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$. Soit g sa somme.

b. Étudier la convergence normale de cette série. En déduire que g est continue sur $]-1, +\infty[$.

c. Prouver que, pour tout $h > 0$,

$$\zeta(1 + h) = \frac{1}{h} + g(h).$$

En déduire que

$$\lim_{h \to 0} \left[\zeta(1 + h) - \frac{1}{h} \right] = \gamma_0.$$

d. Prouver que, pour $n \geqslant 2$,

$$w_n'(h) = -\frac{\ln n}{n^{1+h}} + \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t^{1+h}}\, dt$$

(on pourra le vérifier en calculant cette dernière intégrale). Étudier la convergence normale de la série de terme général w_n'. En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et que $g'(0) = -\gamma_1$.

e. On admettra que, pour $n \geqslant 2$, w_n est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et que, pour tout entier r, sa dérivée d'ordre r $D^r w_n$ s'obtient en dérivant sous le signe $\int$, c'est-à-dire que :

$$(1) \qquad D^r w_n(h) = (-1)^r \left[\frac{(\ln n)^r}{n^{1+h}} - \int_{n-1}^{n} \frac{(\ln t)^r}{t^{1+h}}\, dt \right].$$

En déduire que g est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.

Exprimer $D^r g(0)$ et le développement limité à l'ordre k de $h \longmapsto \zeta(1 + h) - \frac{1}{h}$ au voisinage de $h = 0$ en fonction des nombres γ_r.

f. Établir que le rayon de convergence de la série de Taylor de g au point 0 est supérieur à 1 (au sens large).

g. Prouver enfin que si $0 \leqslant h < 1$, la somme de cette série de Taylor est égale à g; à cet effet, on pourra majorer $| D^r g(h) |$ en utilisant (1).